QÜESTIONS

1.- Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.
[2 punts]

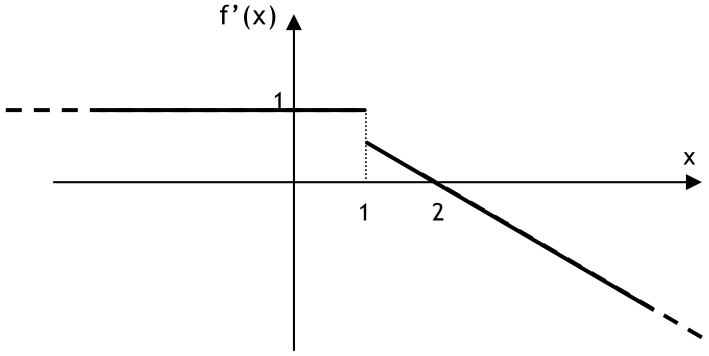
Si el pla ha d'èsser perpendicular a la recta, el vector director de la recta serà el vector director associat al pla:

$$r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad \pi : Ax+By+Cz+D=0 \quad \to \quad r \perp \pi \Rightarrow \vec{v_r} \,//\, \overrightarrow{VA_\pi}$$

$$(A,B,C)=(1,1,1)\wedge(2,1,0)=\begin{vmatrix} i & 1 & 2 \\ j & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix}=2j+k-2k-i=-i+2j-k=(-1,+2,-1)$$

$$-x+2y-z+D=0,\quad si\ passa\ per\ l'origen \Rightarrow D=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi : -x+2y-z=0}}\ \bullet$$

2.- La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f : R \to R$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de R i per què.
b) Estudieu el creixement i decreixement de $f(x)$.
c) Tobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és aixé, per a quin valor de x i de quin tipus.
d) Sabent que $f(0)=1$, calculeu el valor de $f(1)$.

Justifiqueu les respostes.
[0,5 punts cada apartat]

a) La funció no és derivable en el punt $x=1$ ja que la derivada per l'esquerra del punt $x=1$ val 1 i per la dreta val $\frac{1}{2}$.

b)

$$f'(x)>0,\quad \forall x\in(-\infty,1) \quad \Rightarrow \quad f(x) \quad creix$$
$$f'(x)>0,\quad \forall x\in(1,2) \quad \Rightarrow \quad f(x) \quad creix,\ en\ x=1\ malgrat\ no\ és\ derivable\ creix,\ és\ cont.$$
$$f'(x)<0,\quad \forall x\in(2,+\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) \quad decreix.$$

c) *En* $x = 2$ *hi ha un extrem relatiu ja que* $f'(2) = 0$ *i abans* $f(x)$ *creix i després decreix, llavors en* $x = 2$ *hi ha un màxim.*

d)

$$\forall x \in (-\infty, 1) \quad \rightarrow \quad f(x) = \int 1\, dx = x + k, \quad com\ f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 + k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$\forall x \in (1, +\infty) \quad \rightarrow \quad \bar{f}(x) = \int \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x + k'$$

$$Com\ f(x)\ és\ contínua \Rightarrow \quad f(1) = \bar{f}(1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{2 = f(1) = \bar{f}(1)}} = -\frac{1}{4} + 1 + k' \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{5}{4} & si\ x > 1. \end{cases} \bullet$$

3.- Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

[2 punts]

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \quad \rightarrow \quad y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a \quad \rightarrow \quad y'' = 12ax^2 + 12ax$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12ax^2 + 12ax = 0 \quad \Rightarrow \quad 12ax \cdot (x + 1) = 0 \quad \underset{a \neq 0}{\rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$Pendent\ recta\ tangent\ en\ x = 0 \quad \rightarrow \quad y'(0) = 0 + 0 - a = -a$$

$$Pendent\ recta\ tangent\ en\ x = -1 \quad \rightarrow \quad y'(-1) = -4a + 6a - a = a$$

$$Perpendiculars: \ -a = -\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \pm 1}} \bullet$$

4.- Trobeu els punts de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans $\pi_1 : 4x - 3z - 1 = 0$ i $\pi_2 : 3x + 4y - 1 = 0$

[2 punts]

$$(a, b, c) \quad \rightarrow \begin{cases} de\ r: a - 1 = b + 2 = c \quad \rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = c - 2 \end{cases} \\ d((a, b, c), 4x - 3z - 1 = 0) = d((a, b, c), 3x + 4y - 1 = 0) \end{cases}$$

$$\left| \frac{4a - 3c - 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{3a + 4b - 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| \quad \Rightarrow \quad |4a - 3c - 1| = |3a + 4b - 1| \quad \Rightarrow$$

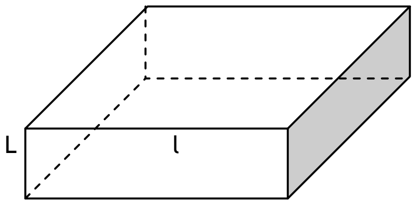
$$\Rightarrow \quad |4c + 4 - 3c - 1| = |3c + 3 + 4c - 8 - 1| \quad \Rightarrow \quad |c + 3| = |7c - 6| \quad \Rightarrow \begin{cases} c + 3 = 7c - 6 \rightarrow c = 3/2 \\ c + 3 = -7c + 6 \rightarrow c = 3/8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3/2 + 1 = 5/2 \quad \rightarrow \quad b = 3/2 - 2 = -1/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(a, b, c) = (5/2, -1/2, 3/2)}} \bullet \\ a = 3/8 + 1 = 11/8 \quad \rightarrow \quad b = 3/8 - 2 = -13/8 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(a, b, c) = (11/8, -13/8, 3/8)}} \bullet \end{cases}$$

PROBLEMES

5.- Un magatzem te forma de prisma recte de base quadrada u¡i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sol és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

[4 punts]



$$Volum = 768 \ m^3 = l^2 \cdot L \quad \rightarrow \quad L = \frac{768}{l^2}$$

$$P = 100 \cdot S_{lateral} + 300 \cdot S_{sostre} = 100 \cdot 4 \cdot l \cdot L + 300 \cdot l^2$$

$$P = 400 \cdot l \cdot \frac{768}{l^2} + 300 \cdot l^2 = \frac{307200}{l} + 300 \cdot l^2$$

$$P' = -\frac{307200}{l^2} + 600 \cdot l \quad \rightarrow \quad P' = 0 \Rightarrow \frac{307200}{l^2} = 600 \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad l^3 = \frac{307200}{600} = 512 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{l = 8 \quad \rightarrow \quad L = \frac{768}{8^2} = 12}} \bullet$$

6.- A l'espai considereu els tres plans d'equacions:
$\pi_1 : x + 2y + z = 1, \quad \pi_2 : px + y + pz = 1, \quad \pi_3 : px + y + 2z = 1,$ on p és un paràmetre real.

a) Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.

b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.

c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = \frac{1}{2}$.

[2 punts l'apartat *a*, 1 punt l'a`partat *b*, 1 punt l'apartat *c*]

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + z = 1 \\ \pi_2 : px + y + pz = 1 \\ \pi_3 : px + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad (A \vdots \overline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ p & 1 & p & \vdots & 1 \\ p & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2$$

$$2p^2 - 5p + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a) \ \forall p \neq \left\{\tfrac{1}{2}\right\} i \left\{2\right\} \quad \rightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \rightarrow \quad rangA = 3 = rang\overline{A} \quad \Rightarrow \quad COMP.\ DETERM. \quad \Rightarrow PUNT$$

$$Si \ p = 1 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + z = 1 \\ \pi_2 : 1x + y + 1z = 1 \\ \pi_3 : 1x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2y - z \\ 1 - 2y - z + y + z = 1 \\ 1 - 2y - z + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \bullet \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Si la intersecció ha de ser una recta : $\rightarrow$ *COMPAT. INDETERM. GRAU LLIBERT 1*

$$Si \ p = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad rangA = 2 = rang\overline{A}, \ tenim \ dues \ files \ iguals.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2y - z \\ 2 - 4y - 2z + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad 1 = 3y \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} = y \quad \rightarrow \quad x = 1 - \frac{2}{3} - z = \frac{1}{3} - z$$

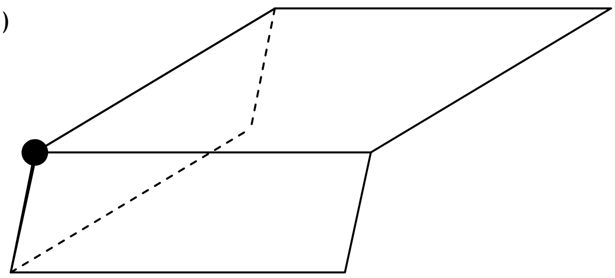
$$(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{3} - z, \tfrac{1}{3}, z\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0\right) + z \cdot (-1, 0, 1) \bullet$$

c) Si $p = \frac{1}{2}$ *, tenim:*

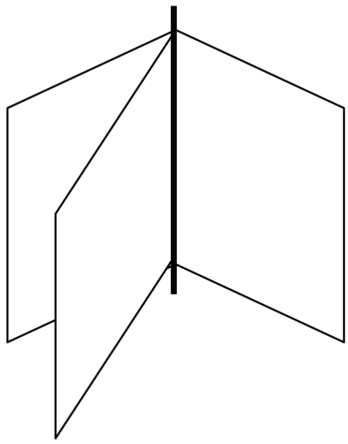
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x + 2y + z = 1 \\ \pi_2 : \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 1 \\ \pi_3 : \frac{1}{2}x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \pi_1 \text{ i } \pi_2 \text{ paral·lels no coincidents} : \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{1}$$

$$\pi_1 \text{ i } \pi_3 \text{ es tallen} : \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \qquad \pi_2 \text{ i } \pi_3 \text{ es tallen} : \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \neq \frac{\frac{1}{2}}{2}$$

a)



b)



c)