



Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Un estudi de laboratori sobre la propagació d'una espècie de mosques mostra que, passades t setmanes, el nombre d'individus és $N(t)$ centenars de mosques, en què $N(t) = -(t-2)^2 + 9$.
 - a) Quantes mosques formen la població al cap d'una setmana? Quantes setmanes han de transcórrer fins a la desaparició total de les mosques?
[1 punt]
 - b) Quina és la població màxima d'individus? Quantes setmanes han hagut de passar per a obtenir aquesta població màxima?
[1 punt]

2. Una empresa fabrica dos tipus de begudes, que anomenarem B_1 i B_2 , i en el procés de fabricació fa servir dos tipus d'ingredients, que designarem C i D. Disposa de 90L de C i de 150L de D. Per cada bidó de beguda B_1 calen 1L d'ingredient C i 2L d'ingredient D, i per cada bidó de beguda B_2 calen 2L de C i 1L de D. Sabem que cada bidó de B_1 dóna 10€ de benefici, i que cada bidó de B_2 en proporciona 15€.
 - a) Plantegeu les inequacions corresponents a les restriccions indicades, calculeu els vèrtexs de la regió factible, i dibuixeu-la.
[1 punt]
 - b) Escriviu la funció objectiu. Quants bidons de cada tipus cal fabricar per a obtenir el benefici màxim? Quin és aquest benefici?
[1 punt]

3. Considereu el triangle de vèrtexs $A=(2, -1)$, $B=(5, 0)$ i $C=(2, 4)$.
- a)** Determineu les equacions de les rectes del pla que contenen els costats del triangle ABC .
[1 punt]
- b)** Considereu el sistema d'equacions format per les tres equacions de l'apartat anterior. Determineu el rang de la matriu associada i el rang de la matriu ampliada d'aquest sistema. Justifiqueu la resposta.
[1 punt]
4. Determineu dos nombres enters positius que sumin 25, de manera que el doble del quadrat del primer sumat amb el triple del quadrat del segon doni el mínim valor possible.
[2 punts]
5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- a)** Una matriu B , la primera fila de la qual és $(2, 1)$, té dues columnes i compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Completeu-la.
[1 punt]
- b)** Calculeu $(A \cdot B)^{-1}$.
[1 punt]
6. Sabem que la funció $f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$ passa pel punt $(1, 0)$, i que la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és paral·lela a la recta $12x - 2y = 3$.
- a)** Determineu els valors dels paràmetres a i b .
[1 punt]
- b)** Per a $a=1$ i $b=9$, determineu, si n'hi ha, les abscisses dels extrems possibles (màxims o mínims) de la funció, i classifiqueu-los.
[1 punt]



L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Temari: GLOBAL

RESOLUCIÓ

1.- $N(t) = -(t-2)^2 + 9$ en centenars. i t en setmanes

a)

$$N(1) = -(1-2)^2 + 9 = 8 \text{ centenars.}$$

$$N(t) = 0 \rightarrow -(t-2)^2 + 9 = 0 \rightarrow (t-2)^2 = 9 \rightarrow t-2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \bullet \\ t = -1, \text{ NO} \end{cases}$$

b)

$$N'(t) = -2(t-2) \rightarrow N'(t) = 0 \Rightarrow -2(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ setmanes } \bullet.$$

$$N(2) = -(2-2)^2 + 9 = 9 \text{ centenars. } \bullet$$

2.-

	C	D	
B ₁	1	2	10€/bidó
B ₂	2	1	15€/bidó
	90	150	

Sigui:

x el nombre de bidons de B₁

y el nombre de bidons de B₂

Restriccions:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 90 \rightarrow y \leq 45 - \frac{x}{2} \\ 2x + y \leq 150 \rightarrow y \leq 150 - 2x \end{cases}$$

Funció objectiu:

$$z = 10x + 15y$$

Temari: GLOBAL

RESOLUCIÓ



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 90 \rightarrow y \leq 45 - \frac{x}{2} \\ 2x + y \leq 150 \rightarrow y \leq 150 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (0,45) \\ (0,150) \\ \left. \begin{cases} y \leq 45 - \frac{x}{2} \\ y \leq 150 - 2x \end{cases} \right\} \rightarrow (70,10) \end{cases}$$

	(0,0)	(0,45)	(70,10)	(75,0)
$z = 10x + 15y$	$10 \cdot 0 + 15 \cdot 0$	$10 \cdot 0 + 15 \cdot 45$	$10 \cdot 70 + 15 \cdot 10$	$10 \cdot 75 + 15 \cdot 0$
	0	675	850	750

Temari: GLOBAL

RESOLUCIÓ

3.- $A(2,-1) \quad B(5,0) \quad C(2,4)$

a)

$$r_{AB} = \begin{cases} (5,0) \\ m = \frac{0+1}{5-2} = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow (y-0) = \frac{1}{3}(x-5) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \bullet$$

$$r_{AC} = \begin{cases} (2,-1) \\ (2,4) \end{cases} \rightarrow x = 2 \bullet$$

$$r_{CB} = \begin{cases} (5,0) \\ m = \frac{4-0}{2-5} = -\frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow (y-0) = -\frac{4}{3}(x-5) \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \bullet$$

b)

$$\left. \begin{matrix} x = 2 \\ x - 3y - 5 = 0 \\ 4x - 3y - 2 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow (A|\bar{A}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \text{rang } A = 2 \\ \text{rang } \bar{A} = 3 \end{cases}$$

Les rectes es tallen 2 a 2, però les tres alhora no és tallen: Incompatible.

4.-

$$x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$$

$$V = 2x^2 + 3y^2 \rightarrow V = 2x^2 + 3 \cdot (25 - x)^2 \rightarrow V' = 4x + 6 \cdot (25 - x) \cdot (-1)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 4x + 6 \cdot (25 - x) \cdot (-1) = 0 \rightarrow 10x - 150 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 15 \text{ i } y = 10 \bullet}}$$

5.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ b & c \\ e & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ b & c \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} 2 - b + 3e = 1 \\ -6 + b - 2e = 1 \\ 1 - c + 3f = 3 \\ -3 + c - 2f = 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} b = 19 \\ c = 1 \\ e = 6 \\ f = 1 \end{cases}$$

Temari: GLOBAL

RESOLUCIÓ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} : \det(A \cdot B) = -1 \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

6.-

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$$

a)

$$\text{Passa pel punt } (1,0) \rightarrow 0 = a + 3 - b - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - b$$

$$y = 6x - \frac{3}{2} \rightarrow f'(1) = 6 = 3a + 6 - b$$

$$\begin{cases} 0 = a + 3 - b - \frac{1}{3} \\ 6 = 3a + 6 - b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

b)

$$a = 1 \text{ i } b = 9$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 6 \rightarrow \begin{cases} f''(-3) < 0 \text{ màxim} \\ f''(1) > 0 \text{ mínim} \end{cases}$$

