Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu $\boldsymbol{M}$ no és invertible.
b) Per a $k=0$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.

[1 punt per cada apartat]

2. Donada la recta $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

[2 punts]

3. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x = -2$.
d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

4. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.
b) Deduïu el valor de $\boldsymbol{A}^{101}$.
NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.
[1 punt per cada apartat]

5. Considereu la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=z-a$ i el pla $\pi: 2x+y-5z=5$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a.
b) Quan $a=3$, calculeu la distància de la recta r al pla π.
[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(a)=\int_0^{1/a}(a^2+x^2)dx$ per $a>0$.

a) Comproveu que $f(a)=\dfrac{1}{3a^3}+a$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.
[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

RESOLUCIÓ

1.-a)

$$M \text{ no invertible} \leftrightarrow \det M = 0$$

$$\det M = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = (k+1)\cdot\begin{vmatrix} k-2 & 1 \\ k-2 & -k \end{vmatrix} = (k+1)\cdot\left[-k^2+2k-k+2\right] =$$

$$= (k+1)\cdot\left[-k^2+k+2\right]$$

$$\det M = 0 \quad \rightarrow \quad (k+1)\cdot\left[-k^2+k+2\right] = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} k+1=0 \rightarrow k=-1 \\ -k^2+k+2=0 \rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Llavors}: M \textit{ no té inversa si } k=-1 \textit{ o } k=2 \bullet$$

b)

$$Si\ k=0 \quad \rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \det M = 2 \quad i \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \bullet$$

2.-

$$r \perp \pi \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{VA_\pi}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ j & -1 & 0 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = -i+3j+k-2j = -i+j+k \quad \rightarrow \quad (-1,1,1)$$

$$\pi: -x+y+z+D=0 \quad \textit{però passa pel punt } P(1,0,-1) \quad \rightarrow \quad -1+0-1+D=0 \Rightarrow D=2$$

$$\pi: -x+y+z+2=0 \bullet$$

3.-

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

a)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \rightarrow \quad f'(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} b = 2a - 3 \\ \forall a, c \in R \end{cases} \bullet$$

b)

$$f''(x) = 6x + 2a \quad \rightarrow \quad f''(0) = 6 \cdot 0 + 2a = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}} \bullet$$

c)

$$f(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \quad \rightarrow \quad -8 + 4a - 2b + c = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} c = -4a + 2b + 8 \\ \forall a, b \in R \end{cases} \bullet$$

d)

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a - 3 \\ a = 0 \\ c = -4a + 2b + 8 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \underline{\underline{a = 0,\ b = -3\ i\ c = 2}} \bullet$$

4.-

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (Id) \quad \rightarrow \quad Fa\ un\ cicle\ d'ordre\ 3,\ ja\ que\ A^4 = A^3 \cdot A = Id \cdot A = A$$

$$Llavors,\ com: 101 = 3 \cdot 33 + 2$$

$$A^{101} = A^{(3 \cdot 33+2)} = A^{3 \cdot 33} \cdot A^2 = \left(A^3\right)^{33} \cdot A^2 = (Id)^{33} \cdot A^2 = Id \cdot A^2 = A^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T \bullet$$

5.-

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z - a \qquad \qquad \pi: 2x + y - 5z = 5$$

a)

Com el paràmetre $\underline{a}$ *no intervé en la direcció, estudiarem els vector directors:*

$$\overrightarrow{v_r} = (3,-1,1)\ i\ \overrightarrow{VA_\pi} = (2,1,-5)$$

$$(3,-1,1) \cdot (2,1,-5) = 6 - 1 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{VA_\pi} \quad \rightarrow \quad r \| \pi.$$

Ara bé, coincident o no?

Això depèn de la posició i aquí influeix el paràmerte ja que forma part d'un punt de la recta $(1,-2,a)$.

Pel valor del paràmetre que el punt sigui del pla, seran paral·lels coincidents:

$$2 \cdot 1 + (-2) - 5a = 5 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{a = -1}} \bullet$$

$$LLavors: \begin{cases} a = -1 & \rightarrow \quad r \subset \pi \\ a \neq -1 & \rightarrow \quad r \| \pi\ però\ r \not\subset \pi \end{cases} \bullet$$

b)

Si $a = 3$, *el punt de la recta és* $(1,-2,3)$

$$d\left[(1,-2,3),\ 2x + y - 5z - 5 = 0\right] = \left| \frac{2 \cdot 1 - 2 - 5 \cdot 3 - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2 - (-5)^2}} \right| = \frac{20}{\sqrt{30}} = \frac{20\sqrt{30}}{30} = \frac{2}{3}\sqrt{30} \bullet$$

6.-

$$f(a)=\int_0^{1/a}\left(a^2+x^2\right)dx \quad per\ a>0$$

a) $f(a)=\int_0^{1/a}\left(a^2+x^2\right)dx=\left[a^2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/a}=\left(a^2\cdot\frac{1}{a}+\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{3}\right)-(0)=\underline{\underline{a+\frac{1}{3a^3}}}\ \bullet$

b)

$$f(a)=a+\frac{1}{3a^3} \quad \to \quad f'(a)=1+\frac{1}{3}(-3)a^{-4}=-a^{-4}+1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{a=1}\ \bullet \\ a=-1\ no\ val. \end{cases}$$

$$f''(a)=4a^{-5} \quad \to \quad f''(1)>0\ mínim\ \bullet$$